

# 令和 2 年度 試験問題

## 前期日程

# 数 学 (120 分)

## 注 意

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は 7 ページあります。
- 3 解答用紙は 4 枚あります。解答用紙には受験番号欄(1 枚につき 2 ケ所)と氏名欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入下さい。
- 4 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせ下さい。  
なお、問題冊子の 2 ページ、4 ページ、6 ページには何も印刷されていません。
- 5 解答は、全て解答用紙の指定されたところに書き下さい。書き切れない場合は、当該解答用紙の裏面を使用してよいが、表面に「裏面使用」と明記し、穴よりも下側を使用下さい。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰り下さい。

1  $\angle AOB = 90^\circ$  の直角二等辺三角形  $OAB$  の外側に、それぞれ  $OA$  および  $OB$  を 1 辺とする正三角形  $OAK$  および正三角形  $OBL$  をつくり、線分  $AL$  と線分  $BK$  との交点を  $M$  とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  として、以下の問いに答えよ。

(配点 75 点)

- (1)  $\overrightarrow{OK}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (2)  $\overrightarrow{AL}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (3)  $\angle KML$  の値を求めよ。
- (4)  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AL}$  を満たす実数  $x$  を求めよ。

2  $a$  を 1 より大きな実数とし,  $x$  の関数  $f(x) = x^3 - a^2x$  と  $g(x) = a^2 - x^2$  を考える。曲線  $y = f(x)$  を  $C_1$ , 曲線  $y = g(x)$  を  $C_2$  とするとき, 以下の問いに答えよ。 (配点 75 点)

- (1) 曲線  $C_1$  と曲線  $C_2$  の交点を求めよ。
- (2) 曲線  $C_1$  と曲線  $C_2$  とで囲まれた部分のうち,  $f(x) \geq g(x)$  である部分の面積  $S_1$  を求めよ。
- (3) 曲線  $C_1$  と曲線  $C_2$  とで囲まれた部分のうち,  $f(x) \leq g(x)$  かつ  $x \leq 0$  である部分の面積を  $S_2$  とする。  $S_1 - S_2$  の最小値とそのときの  $a$  の値を求めよ。

**3** 原点を  $O$  とする座標平面において、曲線  $y = x \log x$  と直線  $y = x \log 2$  の交点を  $A$  とする。次の問いに答えよ。 (配点 75 点)

- (1) 点  $A$  の座標を求めよ。
- (2) 曲線  $y = x \log x$  の点  $A$  における接線の方程式を  $y = h(x)$  とする。 $x > 0$  のとき  $x \log x \geq h(x)$  が成り立つことを示せ。
- (3) 曲線  $y = x \log x$  上に点  $B(t, t \log t)$  をとる。正数  $t$  が点  $A$  の  $x$  座標よりも小さい範囲を動くとき、三角形  $OAB$  の面積を最大にする  $t$  の値を求めよ。

4

(配点 75 点)

〔1〕 等比数列  $\{a_n\}$  の公比と等差数列  $\{b_n\}$  の公差が同じ値  $d$  であるとする。ただし、 $d \neq 0$  とする。それぞれの数列の項に対して、 $a_1 = b_1$ 、 $a_2 = b_3$ 、 $a_4 = b_7$  が成り立つとき、初項  $a_1$  と公比(公差)  $d$  の値を求めよ。

〔2〕 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2^x} dx$$