

令和 5 年度 試験問題

前期日程

数 学 (120 分)

注 意

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は 7 ページあります。
- 3 解答用紙は 4 枚あります。解答用紙には受験番号欄(1 枚につき 2 ケ所)と氏名欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入下さい。
- 4 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせ下さい。
なお、問題冊子の 2 ページ、4 ページ、6 ページは下書き用紙です。
- 5 解答は、全て解答用紙の指定されたところに書き下さい。書き切れない場合は、当該解答用紙の裏面を使用してよいが、表面に「裏面使用」と明記下さい。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰り下さい。

1 次の問いに答えよ。

(配点 75 点)

[1] i を虚数単位とし, x, y を正の整数とする。複素数 $z = x + yi$ が $z^2 = 40 + 42i$ を満たすとき, x, y の値を求めよ。

[2] $x > 0$ のとき $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

[3] 不定積分 $\int (8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1) dx$ を求めよ。

(下書き用紙)

2 三角形 ABC の内部に点 O があり, $2\vec{OA} + 3\vec{OB} + 4\vec{OC} = \vec{0}$, $OA = OB = OC = 1$ とする。点 C から直線 AB に下ろした垂線を CH とする。次の問いに答えよ。

(配点 75 点)

- (1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ の値を求めよ。
- (2) 辺 AB の長さを求めよ。
- (3) \vec{CH} を \vec{OA} と \vec{OB} を用いて表せ。
- (4) 三角形 ABC の面積を S_1 , 三角形 OAB の面積を S_2 とおく。 $\frac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

(下書き用紙)

3 $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 1}$ とする。原点を O とする座標平面において、曲線 $y = f(x)$ の変曲点のうち、 x 座標が正であるものを A とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 A における接線と x 軸との交点を B とする。次の問いに答えよ。 (配点 75 点)

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減, グラフの凹凸を調べて, グラフを図示せよ。
- (2) 三角形 OAB の面積 S_1 を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と直線 OA で囲まれた図形のうち, $x \geq 0$ の部分の面積 S_2 を求めよ。また, S_2 と (2) の S_1 の大小関係を示せ。必要ならば, 自然対数の底 e が $2.718\cdots$ であることを用いてよい。

(下書き用紙)

4 箱の中に、1 から 9 までの番号が 1 つずつ書かれた玉が 9 個入っている。この中から 1 個ずつ順に 3 個の玉を取り出す。ただし、取り出した玉は箱に戻さないとする。玉に書かれた番号を取り出した順に a, b, c とする。 (配点 75 点)

- (1) $a < b < c$ となる確率を求めよ。
- (2) $(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $|(a - b)(b - c)(c - a)| = 1$ となる確率を求めよ。
- (4) $|(a - b)(b - c)(c - a)| = 2$ となる確率を求めよ。

