

令和 5 年度 試験問題

中期日程

数 学 (120 分)

注 意

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は 7 ページあります。
- 3 解答用紙は 4 枚あります。解答用紙には受験番号欄(1 枚につき 2 ケ所)と氏名欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入下さい。
- 4 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせ下さい。
なお、問題冊子の 2 ページ、4 ページ、6 ページは下書き用紙です。
- 5 解答は、全て解答用紙の指定されたところに書き下さい。書き切れない場合は、当該解答用紙の裏面を使用してよいが、表面に「裏面使用」と明記下さい。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰り下さい。

1 次の問いに答えよ。

(配点 75 点)

[1] 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) a_2 と a_3 の値を求めよ。

(2) $b_n = 2^n a_n$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[2] 自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ の中の異なる 2 個の数の積を考える。その積の総和を求めよ。

(下書き用紙)

- 2 三角形 OAB において, $OA = 1$, $OB = \sqrt{2}$ とする。辺 AB 上に点 C があり, $\angle AOC = 30^\circ$, $\angle COB = 45^\circ$ とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおき,

$$\vec{c} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

をみたす実数 t をとる。次の問いに答えよ。

(配点 75 点)

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ 及び $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を t で表せ。
- (3) t の値を求めよ。
- (4) 辺 OB 上に点 D をとり, 直線 AD と直線 OC が直交するようにする。線分 OD の長さを求めよ。

(下書き用紙)

3 座標平面上に3点 $A(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$, $B(\cos \theta, -\sin \theta)$, $C\left(\frac{8}{3}, 0\right)$ がある。
ただし, $0 < \theta < \pi$ とする。次の問いに答えよ。 (配点 75 点)

- (1) 直線 AB と x 軸との交点を P とする。点 P の座標を θ で表せ。
- (2) 三角形 ABC の面積 $S(\theta)$ を求めよ。
- (3) 面積 $S(\theta)$ が最大になるときの点 A の座標を求めよ。

(下書き用紙)

4 次の問いに答えよ。

(配点 75 点)

〔1〕 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を求めよ。

〔2〕 定積分 $\int_{-3}^5 \frac{3x}{\sqrt{6-x}} dx$ を求めよ。

〔3〕 不定積分 $\int \frac{x^2 + 2x - 2}{2x^3 + x^2 - 5x + 2} dx$ を求めよ。

